

有限衍射 X 波非线性声场特性研究

杜宏伟, 陆 伟, 彭 虎

(中国科学技术大学电子科学与技术系, 中国合肥 230027)

摘 要: X 波用于超声成像可以获得很高的帧率,但在线性成像模式下图像空间分辨率相对于传统的聚焦成像有所下降.本文通过时域数值方法求解 KZK(Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov)方程,研究有限衍射 X 波的非线性声场特性.结果表明:无论宽带或限带 X 波,其非线性声场同样是有限衍射波,并且二次谐波具有比基波更窄的主瓣和更小的副瓣.采用 X 波的二次谐波进行成像能够在整个成像区域获得更高的分辨率.理论分析验证了数值计算结果.

关键词: X 波; KZK 方程; 二次谐波

中图分类号: R318.04 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2010) 03-0512-05

Study on Property of Nonlinear Field of Limited-Diffraction X Waves

DU Hong-wei, LU Wei, PENG Hu

(Dept. of Electronic Science and Technology, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230027, China)

Abstract: X waves may be used in ultrasound imaging to obtain very high frame rate. But the spatial resolution of the image with a linear imaging mode decreases as compared to conventional focused imaging. The nonlinear fields of limited-diffraction X waves are calculated and studied by solving the KZK equation using a time-domain numerical method. The result indicates that the nonlinear fields of broadband and band-limited X waves are both limited-diffraction beams. Moreover, the second harmonic component has narrower mainlobe and lower sidelobes than the fundamental field. Utilizing the second harmonic of X waves in ultrasound imaging, higher spatial resolution would be obtained throughout the entire imaging range. A theoretical analysis verifies the numerical calculation result.

Key words: X waves; KZK (Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov) equation; second harmonic

1 引言

1992 年 Jian-yu Lu 推导出线性波动方程的一簇非衍射通解^[1],并发现该簇非衍射解中的一类子集在轴平面(柱坐标系)上具有类似 X 的形状,所以称之为“X wave”.它在传播过程中波束不会发散,且在任意轴向(传播方向)位置上都保持“X”的脉冲形状,因此是一种非衍射波(Non-diffraction Beam).发射严格的 X 波需要无限大孔径的换能器,而实际的有限孔径换能器只能近似实现有限衍射 X 波^[2](Limited-Diffraction X waves).X 波的优点是它具有很大的声场深度,衍射效应很小,成像时不需要动态聚焦,因此可以在整个成像区域保持较高的空间分辨率而不会降低成像速度.2006 年 Jian-yu Lu 等实现了基于 X 波的高帧率(High Frame Rate, HFR)超声成像系统^[3,4].该系统每秒重建图像的理论上限达到 3750 帧,大大提高了时间分辨率.但 HFR 成像系统的空

间分辨率有待提高^[3].

1996 年 Burns 等提出谐波成像^[5](Harmonic Imaging)的概念.谐波成像通过提取换能器发射的基波在人体组织中产生的高次谐波(目前一般用二次谐波)进行成像,可以获得更高的空间分辨率,目前主要分为造影谐波成像和组织谐波成像两大类.由于高次谐波幅度较弱,难于检测,随后出现了脉冲倒置(Pulse Inversion)技术^[6].它依次发射一对反相脉冲,接收时对两回波信号进行叠加,加强了偶次谐波分量,消去了基波及奇次谐波分量.由于发射与接收次数增加了一倍,进一步降低了成像帧率,容易产生运动伪像.

可见,如果能够将谐波成像和 HFR 成像结合在一起,即可很好地解决传统超声成像中存在的问题,从而同时实现较高的帧率和分辨率.而目前对于 X 波的研究多是基于线性波动方程,在声场计算时多采用 Rayleigh-Sommerfeld 公式,它实际上仅仅适用于小振

幅声波,并未考虑到有限振幅超声传播过程中的非线性效应.X 波的非线性声场是否仍然是有限衍射波?二次谐波是否具有比基波更好的特性?都需要研究 X 波的非线性声场特性.

非线性超声场的主要模型方程是 KZK (Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov) 方程^[7,8],目前对于另一种重要的有限衍射波即 Bessel 波的非线性声场特性已有定量结论^[9,10],研究发现 Bessel 波的非线性声场仍然是有限衍射波,且二次谐波具有比基波更好的特性.但由于 Bessel 波是连续波,可以通过解析方法求解 KZK 方程得到其高次谐波的显式解析解,而 X 波是脉冲波,难以得到高次谐波的显式解析解,这样关于 Bessel 波的研究方法和结论不能简单推广到 X 波.对于 X 波非线性声场特性的研究尚未见报道.

本文采用数值方法求解 KZK 方程,综合考虑非线性、衍射和吸收效应,在模拟人体媒质参数的条件下对有限衍射 X 波的非线性声场进行计算和仿真,研究二次谐波的声场特性,并与 Bessel 波^[11]和传统的 Gauss 聚焦波^[12]进行对比揭示其有限衍射特性.通过理论分析验证数值计算结果.

2 原理

2.1 X 波

线性波动方程的柱坐标下形式为:

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] P = 0 \quad (1)$$

其中 r, z 为径向、轴向坐标, ϕ 为极角, t 为时间; c 为声速; $P = P(r, \phi, z, t)$ 为声压. 方程(1)有如下形式的一簇解^[1]:

$$P_{\zeta}(s) = \int_0^{\infty} T(k) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(\theta) f(s) d\theta \right] dk \quad (2)$$

其中: $s = \alpha_0(k, \zeta) r \cos(\phi - \theta)$

$$+ b(k, \zeta) [z \pm c_1(k, \zeta) t] \quad (3)$$

$$c_1(k, \zeta) = c \sqrt{1 + [\alpha_0(k, \zeta)/b(k, \zeta)]^2} \quad (4)$$

其中, $T(k)$ 表示换能器的频率响应, $k = \omega/c$ 为波数; $A(\theta)$ 是 θ 的任意函数, 表示激励信号随 θ 的变化而变化; $f(s)$, $\alpha_0(k, \zeta)$, $b(k, \zeta)$ 可以是任意连续可微函数, ζ 为锥轴角; k, ζ 两参数均与时间和空间变量无关.

式(2)中令 $\alpha_0(k, \zeta) = -ik \sin \zeta$, $b(k, \zeta) = ik \cos \zeta$, $f(s) = e^s$, $A(\theta) = i^n e^{in\theta}$, $T(k) = a_0 e^{-a_0 k}$, 并且在式(3)中取负号, 即得到 n 阶宽带非衍射 X 波:

$$P_{\text{XBB}n} = \frac{a_0 (r \sin \zeta)^n e^{in\phi}}{\sqrt{M} (\tau + \sqrt{M})^n}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

下标 BB 表示宽带 (broadband), $M = (r \sin \zeta)^2 + \tau^2$, $\tau = [a_0 - i(z \cos \zeta - ct)]$, $a_0 > 0$ 是常量. 如果 $T(k) = B(k) e^{-a_0 k}$, 其中 $B(k)$ 是一个限带函数, 表示换能器的传递

函数. 即得到 n 阶限带 X 波:

$$P_{\text{XBL}n} = \frac{1}{a_0} F^{-1} \left[B \left(\frac{\omega}{c} \right) \right] * P_{\text{XBB}n}, n = 0, 1, \dots \quad (6)$$

角标 BL 表示限带 (band-limited), “*” 表时域卷积, “ F^{-1} ” 表示 Fourier 反变换.

式(5)中令 $n = 0$, 即得到轴对称的 0 阶宽带非衍射 X 波:

$$P_{\text{XBB}0} = \frac{a_0}{\sqrt{(r \sin \zeta)^2 + [a_0 - i(z \cos \zeta - ct)]^2}} \quad (7)$$

0 阶非衍射 X 波是目前可以实现且广泛应用于超声成像、血流成像等领域的一种有限衍射脉冲波, Jian-yu Lu 等对其线性声场进行了深入研究^[1,2].

2.2 KZK 方程

KZK 方程是目前描述有限声束非线性超声场最为精确的方程, 在柱坐标系下的轴对称形式为^[6,7]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t'} = \frac{c}{2} \nabla_{\perp}^2 p + \frac{D}{2c^3} \frac{\partial^3 p}{\partial t'^3} + \frac{\beta}{2\rho_0 c^3} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t'^2} \quad (8)$$

其中: p 为声压, z 代表声传播方向, $t' = t - z/c$ 是延迟时间, c 为声速; D 为声耗散率 ($\alpha = D\omega_0^2/2c^3$ 为吸收系数, ω_0 为基波角频率); ρ_0 是媒质的静态密度, $\beta = 1 + \bar{B}/2\bar{A}$ 是媒质的非线性系数, \bar{B}/\bar{A} 为非线性参量; ∇_{\perp}^2 是径向 Laplace 算子, 在极坐标下的轴对称形式为 $(1/r) \cdot \partial(r \partial/\partial r) / \partial r$.

式(8)右端三项分别描述了超声传播过程中的衍射、吸收和非线性效应.

3 算法

3.1 KZK 方程的时域数值解法

时域数值解法适合计算脉冲激励下的非线性声场^[7], 由式(8)得到:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{t'} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right) dt'' + \frac{D}{2c^3} \frac{\partial^2 p}{\partial t'^2} + \frac{\beta}{2\rho_0 c^3} \frac{\partial p^2}{\partial t'} \quad (9)$$

作变换:

$$\sigma = z/d, \xi = r/a, \tau = \omega_0 t', P = p/p_0 \quad (10)$$

其中 p_0 为声源表面峰值声压, a 为声源半径, d 为聚焦声源焦点位置. 方程(9)转化为:

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma} = \frac{1}{4G} \int_{-\infty}^{\tau} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial P}{\partial \xi} \right) d\tau' + A \frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} + NP \frac{\partial P}{\partial \tau} \quad (11)$$

其中: $G = z_0/d$ 为聚焦声源的线性聚焦增益, $z_0 = ka^2/2$ 是瑞利 (Rayleigh) 距离; $A = ad$, $N = d/\bar{z}$ 分别是吸收参数和非线性参数, $\bar{z} = \rho_0 c^3/\beta\omega_0 p_0$ 是平面波在无损媒质中的冲击波形成距离.

方程(8)右端的衍射项、吸收项和非线性项可分别采用数值方法求解.

3.2 声源条件

对有限衍射 X 波, 在式(7)中 a_0, ζ 预先给定, 令 $z = 0$, 再利用式(10)将变量 r, t 转换成 ξ, τ 即可得到 0 阶宽带 X 波对应的声源条件. 若利用式(6)取 $B(k)$ 为限带函数即可得到 0 阶限带 X 波对应的声源条件.

注意在计算时径向最大值一般取 $\xi_{\max} > 1$ (即 $r_{\max} > a$), 这样在声源半径之外即 $1 < \xi < \xi_{\max}$ 时对应的声压均取为 0.

4 结果

4.1 计算参数设置

本文计算 0 阶宽带、限带 X 波的非线性声场. 所有计算参数均按照医学超声成像中的典型参数选取^[1]. 声源半径 $a = 25\text{mm}$, 声速 $c = 1500\text{m/s}$, $\bar{z} = 0.094\text{m}$, $d = 120\text{mm}$; 吸收系数 α 取 0.025NP/cm , 此值介于人体血液、脂肪的吸收系数之间; 径向和轴向计算步长分别取为 $\Delta\xi = 0.02$, $\Delta\sigma = 0.01$. 径向最大计算值取 $r_{\max} = 2a = 50\text{mm}$, 即认为在此径向范围之外声场能量为零; 轴向最大值取 $z_{\max} = 240\text{mm}$, 即医学超声成像中的典型探测深

度. 时间变量取一个固定的窗:

$$\tau \in [-(G + \omega_0 T_0), (G + \omega_0 T_0)]$$

为了与 Bessel 波和 Gauss 聚焦波进行对比, 采用频域数值方法^[8]计算其非线性声场, 计算参数与 X 波相同, 具体过程可参看文献^[11, 12].

4.2 宽带 X 波的计算结果

在式(7)中取 $a_0 = 0.05$, $\zeta = 4^\circ$. 计算得到的 0 阶宽带 X 波的结果如下:

图 1 是不同传播距离处宽带 X 波脉冲声场的计算仿真结果. 所有仿真图都对声压采用对数变换后进行显示, 灰度范围为 $[-15\text{dB}, 0\text{dB}]$. 该图展现了激励脉冲沿轴向传播的过程, 结果表明在任意轴向位置上非线性声场都保持和激励脉冲类似的“X”形状, 在轴向最大值 $z_{\max} = 240\text{mm}$ 即接近声源半径 10 倍的传播距离之内, 0 阶宽带 X 波的非线性声场仍具有显著的有限衍射特性, 未有明显的波束扩散现象. 而由于非线性效应的存在, 激励脉冲发生了明显的畸变, 不再是对称的“X”形状. 吸收效应则是导致脉冲幅度逐渐减弱的重要原因.

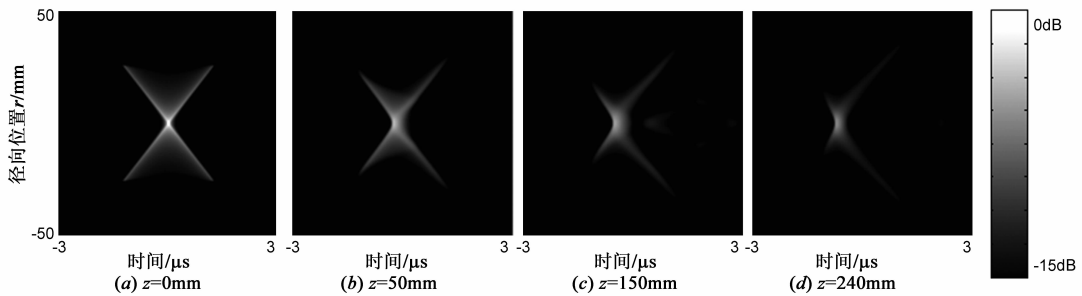


图1 宽带X波在不同传播距离处的脉冲声场

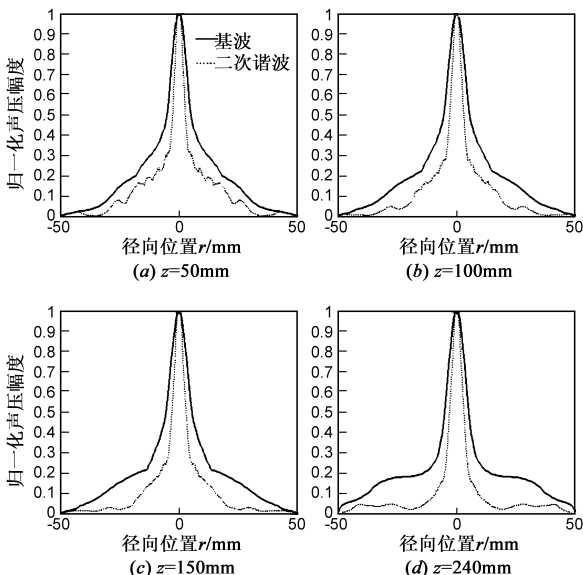


图2 宽带X波的基波和二次谐波在不同传播距离处沿径向的分布曲线

图 2 是宽带 X 波的基波和二次谐波的声压振幅在不同传播距离处沿径向的分布曲线, 各图均已将基波和二次谐波的振幅用各自峰值归一化. 结果表明无论在近场、远场区域, 二次谐波相对于基波都具有更窄的主瓣, 且副瓣得到了更好的抑制, 因此利用二次谐波进行成像可以获得更高的空间分辨率和对比度. 这一结果与 Bessel 波^[11]和 Gauss 聚焦波^[12]的研究结果一致.

4.3 限带 X 波的计算结果

利用式(6)、(7), 取 $B(k)$ 为 Blackman 窗^[2]:

$$B(k) = \begin{cases} a_0 [0.42 - 0.5 \cos(\pi k/k_0) + 0.08 \cos(2\pi k/k_0)], & k \in [0, 2k_0] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

其中 $k_0 = 2\pi f_0/c$, $f_0 = 2.5\text{MHz}$.

图 3 是不同传播距离处限带 X 波脉冲声场的计算仿真结果. 可以得出与宽带 X 波类似的结论, 即限带 X 波的非线性声场仍是有限衍射波.

图 4 是限带 X 波的基波和二次谐波的声压振幅在不同传播距离处沿径向的分布曲线. 结果表明二次谐

波相对于基波具有更窄的主瓣,但不如宽带 X 波显著.副瓣在总体上得到了更好的抑制,但第一副瓣的峰值

略有增加,表 1 给出了二次谐波和基波第一副瓣的幅度比.

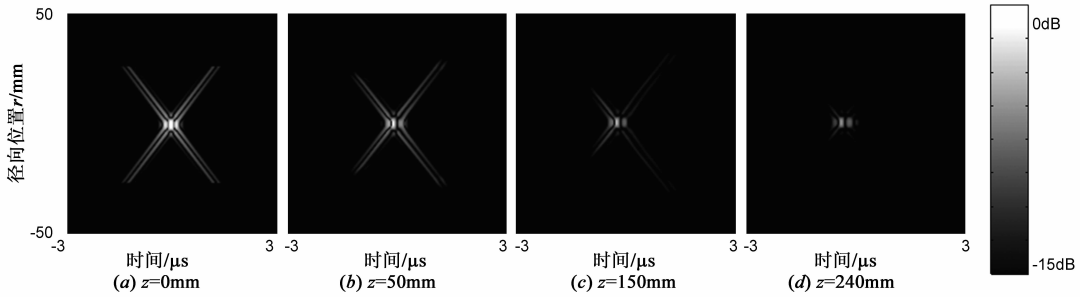


图3 限带X波在不同传播距离处的脉冲声场

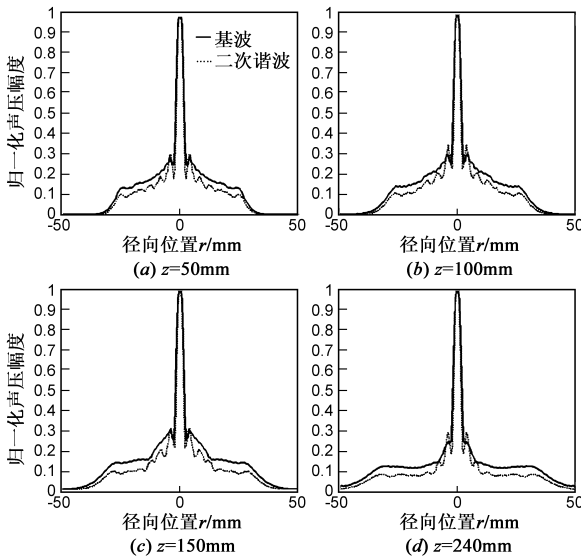


图4 限带X波的基波和二次谐波在不同传播距离处沿径向的分布曲线

4.4 与 Bessel 波和 Gauss 聚焦波的对比较果

图 5 是宽带、限带 X 波和 Bessel 波、Gauss 聚焦波的声场对比图.对比显示 X 波和 Bessel 波的波束沿传播方向可以在很大深度内保持不扩散,具有有限衍射特性,但 Bessel 波副瓣较大.事实上 X 波是由不同频率成分的 Bessel 波加权组合得到的一种非频散、非衍射波^[1].而

表 1 限带 X 波二次谐波和基波第一副瓣的幅度比

	传播距离 z					
	0mm	48mm	96mm	144mm	192mm	240mm
二次谐波	0.285	0.30	0.35	0.31	0.315	0.29
基波	0.225	0.29	0.305	0.3	0.29	0.245
幅度比 (dB)	2.05	0.29	1.20	0.28	0.72	1.46

Gauss 聚焦波在聚焦区域声场能量集中,具有很好的空间分布特性,但在焦域之外波束扩散明显,无法实现很好的空间分辨率.

4.5 计算参数对声场的影响

为了进一步研究非线性、衍射和吸收三种效应对声场特性的影响,我们计算了不同声源条件和媒质参数下的非线性声场,其中最重要的是声源半径 a 、吸收参数 A 和非线性参数 N (对应不同的非线性-吸收比).结果表明声源半径增加时,X 波可以在更大深度内保持有限衍射特性.而声源半径的减小及吸收参数的增加都会对二次谐波声场尤其是远场的空间分布规律有明显的影响,使其声场特性变差.更为细致的结论尚待进一步深入研究.

4.6 理论分析

考察 Bessel 波的声源表面声压表达式^[11]:

$$f(r, t) = J_0(r) e^{-j\omega t} \quad (13)$$

其中 $J_0(r)$ 是第一类零阶 Bessel 函数.可以发现:由于 Bessel 波是连续波,其时间、空间部分可以分离变量,且时间因子 $e^{-j\omega t}$ 作微分运算后形式不变,因此代入 KZK 方程后时间项可以消去,得到只含各谐波分量空间部分的方程,通过解析方法可以得二次谐波分量空间部分的显式解析解^[9,10],进而从理论上定量研究其声场空间分布特性.

而对脉冲波,时间和空间部分一般难以分离变量,各谐波分量空间部分的显式解析解难以求出.一般只有通过数值方法求解 KZK 方程得到数值解.但我们可以借助于 Bessel 波的理论结果对 X 波进行定性的理论分析.

事实上,X 波可以表示为 Bessel 波加权组合^[1]:

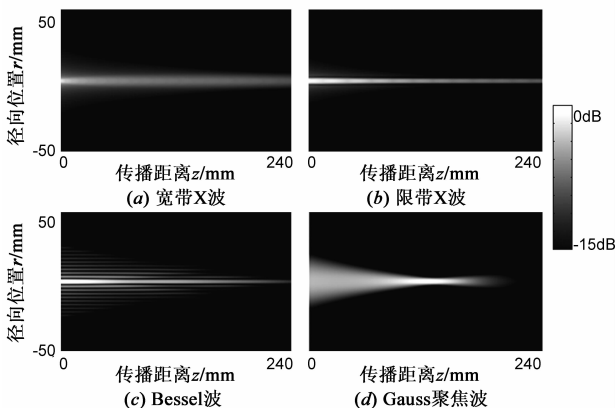


图5 几种非线性声场对比图

$$P_{X_0} = \int_{k_1}^{k_2} B(k) J_0(kr \sin \zeta) \times \exp[-a_0 k + j(kz \cos \zeta - \omega t)] dk \quad (14)$$

对于宽带 X 波, 积分限 $(k_1, k_2) \rightarrow (0, \infty)$.

按文献[9,10]的理论结果:若单频 Bessel 声源表面声压为 $f(r, t)|_{z=0} = J_0(kr \sin \zeta) e^{-j\omega t}$, 其二次谐波在 $4/(ak \sin \zeta)^2 < \sigma < 1/(ak \sin \zeta)$ 的近场几乎是衍射的, 并且沿径向的声压振幅分布为 $J_0(2kr \sin \zeta)$. 这表明二次谐波的声压振幅具有比基波更窄的主瓣, 主瓣和第一副瓣幅度比保持不变. 并且在相同的径向范围内, 二次谐波包含更多的副瓣, 但副瓣总体上得到抑制.

以上结论仅仅适用于单频连续波情况. 对于 X 波, 由式(14)可知其中包含多个频率成分, 每个频率成分均为单频 Bessel 波, 它们在传播过程中两两耦合产生倍频、和频与差频波, 由于各频率成分声源表面声压振幅并不相同, 而是和频率有关, 因此 X 波的二次谐波空间分布比较复杂. 但对于限带 X 波, 尤其是 k_1, k_2 相差不大时, 可以作为准单频波讨论. 这时各频率成分具有近似相同的声源表面声压振幅, 文献[9,10]的理论结果可以近似适用. 本文对限带 X 波的计算中, 中心频率 f_0 对应的近场约为 $0.01 < \sigma < 0.06$, 即 $30\text{mm} < z < 200\text{mm}$, 在这一区域附近, 数值计算结果和理论分析相吻合. 在 $z < 30\text{mm}$ 的极近场和 $z > 200\text{mm}$ 的远场, 二次谐波幅度很弱, 一般难以检测, 无法用于成像.

与文献[1,2]的结果对比显示, 通过时域有限差分法计算得到的 X 波基波声场和 X 波的计算结果及 Rayleigh-Sommerfeld 公式的计算得到的线性声场结果相符.

5 结论

通过以上研究可以得出如下结论:

在模拟人体媒质的典型计算参数条件下, 综合考虑非线性、衍射和吸收效应, 采用数值方法计算 KZK 方程得到的 0 阶宽带、限带 X 波的非线性声场仍然具有显著的有限衍射特性, 并且二次谐波相对于基波具有更窄的主瓣, 主副瓣幅度比在总体上得到了提高, 这意味着利用二次谐波构建的图像具有更高的空间分辨率和对比度.

基于有限衍射 X 波的高帧率成像已被现有研究所证实. 本文的结论表明采用 X 波的二次谐波进行成像有可能进一步提高高帧率成像系统的空间分辨率.

参考文献:

[1] J Y Lu, J F Greenleaf. Nondiffracting X waves-exact solutions to free space scalar wave equation and their finite aperture realizations[J]. IEEE Trans Ultrason, Ferroelect, Contr, 1992, 39(1):19-31.

- [2] J Y Lu, J F Greenleaf. Experimental verification of non-diffracting X waves[J]. IEEE Trans Ultrason, Ferroelect, Contr, 1992, 39(3):441-446.
- [3] Jian-yu Lu. 2D and 3D high frame rate imaging with limited diffraction beams[J]. IEEE Trans Ultrason, Ferroelect, Freq Contr, 1997, 44(4):839-956.
- [4] Jiqi Cheng, Jian-yu Lu. Extended high frame rate imaging method with limited diffraction beams[J]. IEEE Trans Ultrason, Ferroelect, Freq Contr, 2006, 53(5):880-899.
- [5] P N Burns, D H Simpson. Nonlinear imaging[J]. Ultra-sound in Med & Biol, 2000, 26(1):19-22.
- [6] Ya-dong Li, James A. Zagzebski. Computer model for harmonic ultrasound imaging[J]. IEEE Trans Ultrason, Ferroelect, Freq Contr, 2000, 47(4):1000-1013.
- [7] Y S Lee, M F Hamilton. Time-domain modeling of pulsed finite-amplitude sound beams[J]. J Acoust Soc Amer, 1995, 97(2):906-917.
- [8] S I Aanonsen, T Barkve, J N Tjøtta. Distortion and harmonic generation in the near field of a finite amplitude sound beam[J]. J Acoust Soc Amer, 1984, 75(3):749-768.
- [9] Desheng Ding, Jin H Huang. Second-harmonic generation of limited diffraction beams[J]. J Opt A Pure Appl Opt, 2007, 9:1131-1135.
- [10] K B Cunningham, M F Hamilton. Bessel beams of finite amplitude in absorbing fluids[J]. J Acoust Soc Amer, 2000, 108(2):519-525.
- [11] 杜宏伟, 彭虎, 江朝晖, 等. 基于 Fourier-Bessel 级数的 Bessel 型超声场二次谐波近场特性研究[J]. 物理学报, 2007, 56(1):6496-6502.
- [12] 杜宏伟, 彭虎, 韩雪梅, 等. Gauss 型超声场谐波特性的理论研究[J]. 系统仿真学报, 2007, 19(14):3135-3138.

作者简介:



杜宏伟 男, 1976 年 7 月出生于江苏省徐州市. 博士. 现为中国科学技术大学电子科学与技术系讲师. 主要研究方向为超声成像与非线性超声. E-mail: duhw@ustc.edu.cn



陆伟 男, 1969 年 9 月出生于安徽省巢湖市. 博士. 现为中国科学技术大学电子科学与技术系讲师. 主要研究方向为语音信号处理. E-mail: luwei@ustc.edu.cn